ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව / இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம் / Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 1997 අගෝස්තු (නව නිර්දේශය)
கல்விப் பொதுத் தராதரப்பத்திர(உயர் தர)ப் பரீட்சை, 1997 ஓகஸ்ற் (புதிய பாடத்திட்டம்)
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1997 (New Syllabus)

ශුද්ධ ගණිතය II
தூய கணிதம் II
Pure Mathematics II

05	
S	II

පැය තුනයි / மூன்று மணி / *Three hours*

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

---

1. (අ) $A = \begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & -2 \\ 0 & -y \end{bmatrix}$ සහ $B = \begin{bmatrix} x & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

යැයි දී ඇත් නම්, AB න්‍යාසය කුටික සමමිතික වන පරිදි වූ x හි අගයත් y අගයත් සොයන්න.

(ආ)
$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 2 \\ -2y + z &= 4 \\ 2y + z &= 8 \end{aligned}$$

සමීකරණ පද්ධතිය $AX = B$ ලෙස ප්‍රකාශ කළ හැකි පරිදි A න්‍යාසය ලියන්න ; මෙහි $X^T = [x, y, z]$ සහ $B^T = [2, 4, 8]$.

I යනු 3×3 ඒකක න්‍යාසයයි. $A^3 - 5A + 4I = 0$ බව පෙන්වන්න.

එනයින්, $CA = I$ වනසේ C න්‍යාසයක් සොයන්න.

දී ඇති සමීකරණ පද්ධතියේ විසඳුම අපෝහනය කරන්න.

2. (අ) $A = \begin{bmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-b-a \end{bmatrix}$

යැයි දී ඇත්නම් $\det(A)$ හි අගය $(a+b+c)^3$ බව පෙන්වන්න.

(ආ) $S = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ යැයි දී ඇත්නම්, $\det(S - \lambda I) = 0$ වන පරිදි λ සඳහා λ_1 සහ λ_2 අගයයන් සොයන්න; මෙහි I යනු 2×2 ඒකක න්‍යාසයයි.

u_1 සහ v_1 ධන ලෙස ගනිමින්,

$SU = \lambda_1 U$, $U^TU = 1$ සහ $SV = \lambda_2 V$, $V^TV = 1$ සපුරාලන්නා වූ $U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ සහ $V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ සොයන්න.

$P = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{bmatrix}$ යැයි ගනිමින්,

$P^TP = I$ සහ $PSP^T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ බව පෙන්වන්න.

$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ පරිණාමනයෙන් (x, y) ඛණ්ඩාංක පද්ධතිය (x', y') ඛණ්ඩාංක පද්ධතියට පරිණාමනය වේ.

$3x^2 + 2xy + 3y^2 = 4$ සමීකරණය නව ඛණ්ඩාංක පද්ධතියෙන් ප්‍රකාශ කරන්න.

[අනෙක් පිට බලන්න.

3\. (අ) z_1 සහ z_2 යනු, $z_1 + z_2$ සහ $z_1 z_2$ එක් එකක් සෘණ තාත්වික සංඛ්‍යා වන පරිදි වූ සංකීර්ණ සංඛ්‍යා දෙකකි. z_1 සහ z_2 තාත්වික සංඛ්‍යා බව පෙන්වන්න.

(ආ) z_1, z_2 සහ z_3 යනු $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ සහ $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ වන පරිදි වූ නිශ්ශුන්‍ය සංකීර්ණ සංඛ්‍යා වේ. මෙම සංකීර්ණ සංඛ්‍යා, ආර්ගන් සටහනෙහි සමපාද ත්‍රිකෝණයක ශීර්ෂ නිරූපණය කරන බව පෙන්වන්න.

(ඇ) ධන නිඛිලමය දර්ශකයක් සඳහා ද මුවාවර් ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කරන්න.
$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ සහ $k = 0, 1, 2, 3$ සඳහා
$$z_k = \sqrt[4]{r}\left\{\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{4}\right)\right\}$$
යැයි දී ඇත්නම් $k = 0, 1, 2, 3$ සඳහා $z_k^4 = z$ බව පෙන්වන්න.

$k = 0, 1, 2, 3$ විට z_k වලින්, z හි චතුර්ථ මූලවන $z^{\frac{1}{4}}$ හි අගයන් හතර ගෙන දේ. $\left(16^{\frac{1}{4}}\right)^2$ අගය කුලකය, $\left(16^2\right)^{\frac{1}{4}}$ අගය කුලකයේ නියම උපකුලකයක් බව පෙන්වන්න.

4\. ආර්ගන් සටහනෙහි, A, B සහ C ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් z_1, z_2 සහ z_3 සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවලට අනුරූප වේ.
AB සිට වාමාවර්ත අතට මනුවිට AC හි ආනත කෝණය θ නම් ද $AB = AC$ නම් ද
$z_3 - z_1 = (z_2 - z_1)(\cos\theta + i\sin\theta)$ බව පෙන්වන්න.
$PQRS$ යනු ආර්ගන් සටහනෙහි සමචතුරස්‍රයකි.

(i) P සහ Q පිළිවෙළින් z_1 සහ z_2 සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවලට අනුරූප වේ නම් R සහ S ට අනුරූපවන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා z_1, z_2 ඇසුරෙන් සොයන්න.

(ii) Q සහ S පිළිවෙළින් z_1 සහ z_2 සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවලට අනුරූප වේ නම්, P සහ R ට අනුරූප වන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා z_1, z_2 ඇසුරෙන් සොයන්න.

(iii) P යනු $1 - i$ ට අනුරූප ලක්ෂ්‍යයද $PR = 2\sqrt{2}$ වන පරිදි R විචල්‍යය වේ ද Q යනු z ට අනුරූප ලක්ෂ්‍යය ද නම් z සඳහා සම්බන්ධතාවක් ලබාගන්න. එනයින්, Q හි පථය නිර්ණය කරන්න.

5\. $\mathbf{a}$ සහ $\mathbf{b}$ දෛශික දෙකෙහි $\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$ අදිශ ගුණිතය සහ $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ දෛශික ගුණිතය අර්ථ දක්වන්න.

A, B, C යනු ඒක රේඛීය නොවන ලක්ෂ්‍ය තුනක් යැයි ද O යනු මූල ලක්ෂ්‍යය යැයි ද දී ඇත් නම්, $\left|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} \bullet \overrightarrow{OC}\right|$ රාශිය විවරණය කරන්න.

O මූල ලක්ෂ්‍යයට අනුබද්ධයෙන් A, B සහ C ලක්ෂ්‍යය තුනෙහි $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ සහ $\mathbf{c}$ පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙළින් $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ සහ $\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ වේ.

(i) $A\hat{B}C$ කෝණයේ කෝසයිනය
(ii) ABC ත්‍රිකෝණයේ වර්ග ඵලය
(iii) $OABC$ චතුස්තලයේ පරිමාව
(iv) $(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \bullet (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ හි අගය

සොයන්න.

6\. O මූල ලක්ෂ්‍යයට අනුබද්ධයෙන් A, B, C ලක්ෂ්‍ය තුනෙහි පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙළින් $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ වේ.

(අ) D, E, F යනු පිළිවෙළින් BC, CA සහ AB හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය වන අතර AD සහ BE රේඛා G හි දී හමුවේ.
$\overrightarrow{AG} = \lambda\overrightarrow{AD}$ සහ $\overrightarrow{BG} = \mu\overrightarrow{BE}$ ලෙස ලියමින් හා G හි පිහිටුම් දෛශිකය සැලකීමෙන්, λ සහ μ හි අගයයන් ලබා ගන්න.
එනයින් C, G, F ඒක රේඛීය බව පෙන්වන්න.

(ආ) $OABC$ සමාන්තරාස්‍රයක් නම්, P යනු AB හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය ද OP රේඛාව Q හි දී AC හමුවේ ද නම් දෛශික යෙදීමෙන් $OQ = \frac{2}{3}OP$ බව සාධනය කරන්න.

(ඇ) $OA \perp BC$ සහ $OB \perp AC$ නම් $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ දෛශික අඩංගු සමීකරණ දෙකක් ලබා ගන්න.
ඒවා භාවිතයෙන්,

(i) $OC \perp AB$
(ii) $OA^2 + BC^2 = OB^2 + CA^2$

බව පෙන්වන්න.

7. a, h සහ b තාත්ත්වික සංඛ්‍යා විට, $f(x) \equiv a\cos^2 x + 2h\sin x\cos x + b\sin^2 x$ යන්න $\cos 2x$ සහ $\sin 2x$ ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කරන්න.

$f(x)$ සඳහා $A + B\sin(2x+\alpha)$ ආකාරයේ ප්‍රකාශනයක් අපෝහනය කරන්න; මෙහි A, B සහ $\alpha\,(0 \le \alpha < 2\pi)$ යනු නිර්ණය කළ යුතු නියත වේ.

එනයින්, $f(x)$ හි උපරිම හා අවම අගයයන් ද එම අගයයන් ගෙන දෙන $2\pi - \alpha \le x \le 2\pi + \alpha$ හි පිහිටි x හි අනුරූප අගයයන් ද ලබාගන්න.

$a = 3, b = 1$ සහ $h = \sqrt{3}$ විට $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ සඳහා $f(x)$ හි ප්‍රස්තාරය අඳින්න.

8. (අ) (i) $\cos x + \cos(x+\alpha) + \cos(x+\beta) = 0$

සමීකරණයෙහි සාධාරණ විසඳුම ලබාගන්න; මෙහි $0 < \alpha, \beta \le \frac{\pi}{2}$.

(ii) $x > -\sqrt{3}$ සඳහා, $\tan^{-1}x - \tan^{-1}\left(\frac{x\sqrt{3}-1}{x+\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$

බව පෙන්වන්න.

(ආ) ඕනෑම ත්‍රිකෝණයක් සඳහා කෝසයින නියමය ප්‍රකාශ කර සාධනය කරන්න.

ABC ත්‍රිකෝණයක, $\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}$ වන්නේ C කෝණය $= \frac{\pi}{3}$ නම් හා එනම් ම පමණක් වුවහොත් බව පෙන්වන්න.

9. (x_0, y_0) හරහා යන්නා වූ ද බෑවුම m වූ ද සරල රේඛාව මත පිහිටි ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක ඛණ්ඩාංක $(x_0 + t, y_0 + mt)$ ආකාරයට ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න; මෙහි t යනු පරාමිතියකි.

P වනාහි, $AP : PC = 1 : \lambda^2$ වන පරිදි $A(1, 0)$ සහ $C(4, 4)$ ලක්ෂ්‍යය යා කෙරෙන රේඛාව මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයකි; මෙහි $\lambda > 0$. P හරහා AC ට ලම්බ වූ රේඛාව මත පිහිටි B ලක්ෂ්‍යයෙක ඛණ්ඩාංක ඉහත ආකාරයට ප්‍රකාශ කරන්න.
t ඇසුරෙන් AB හි සහ BC හි බෑවුම් කවරේ ද?

BC ට AB ලම්බ නම්, එවිට

(i) B සඳහා පිහිටීම් දෙකක් තිබිය හැකි බව ද අනුරූප t හි අගයන් $\pm \frac{4\lambda}{1+\lambda^2}$ බව ද

(ii) PBC ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය $\frac{1}{2}\frac{25\lambda^3}{(1+\lambda^2)^2}$ බව ද පෙන්වන්න.

10. $S = 0$ වෘත්තයක් ද $u = 0$ සරල රේඛාවක් ද වේ. λ යනු විචල්‍ය පරාමිතියක් විට, $S + \lambda u = 0$ සමීකරණය විවරණය කරන්න. $x^2 + y^2 = 4$ වෘත්තයේත් $x + y = 1$ රේඛාවේත් ඡේදන ලක්ෂ්‍ය හරහා යන Γ විචල්‍ය වෘත්තයක් $x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$ වෘත්තය P සහ Q හි දී ඡේදනය කරයි. PQ රේඛාව අචල ලක්ෂ්‍යයක් හරහා යන බව පෙන්වා එම ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක සොයන්න. PQ හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය, $2x^2 + 2y^2 - 5x + y + 3 = 0$ වක්‍රය මත පිහිටන බව පෙන්වන්න.

11. (අ) වක්‍රයක් $x = \frac{a}{3}(2\cos t + \cos 2t)$, $y = \frac{a}{3}(2\sin t + \sin 2t)$, $0 \le t < 2\pi$ පරාමිතික සමීකරණවලින් අර්ථ දක්වේ. "t" ලක්ෂ්‍යයේ දී ස්පර්ශකය x හි ධන දිශාව සමග සාදන $\alpha\,(0 \le \alpha \le \pi)$ කෝණය, $0 < t \le \frac{\pi}{3}$ විට $\frac{\pi}{2} + \frac{3t}{2}$ බව පෙන්වන්න. $\frac{\pi}{3} < t \le \pi$ විට α සොයන්න.

(ආ) ධ්‍රැවක ඛණ්ඩාංක පිළිවෙළින් (r_1, θ_1) සහ (r_2, θ_2) වූ P_1 සහ P_2 ලක්ෂ්‍ය දෙක අතර දුර සොයන්න.
P_1P_2 විශ්කම්භයක් සේ ඇති වෘත්තයේ සමීකරණය ධ්‍රැවක ආකාරයෙන් ලබා ගන්න.
[කාටීසියානු ඛණ්ඩාංක භාවිතය සඳහා ලකුණු දෙනු නොලැබේ.]

12. අරය r වූ අචල වෘත්තයක තලයේ වෘත්තයෙන් පිටත පිහිටි P විචල්‍ය ලක්ෂ්‍යයක් විචලනය වන්නේ, P සිට වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකයක දුර, වෘත්තයේ අචල ස්පර්ශකයක සිට Pට ඇති ලම්බ දුරෙහි k ගුණාකාරයක් වන පරිදි ය.

අචල ස්පර්ශකය $y-$ අක්ෂය ලෙස ද අචල වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය හරහා යන්නා වූ ද අචල ස්පර්ශකයට ලම්බවූ ද රේඛාව $x-$ අක්ෂය ලෙස ද ගනිමින්, P හි පථය

$$(1 - k^2)x^2 + y^2 - 2rx = 0$$

යන්නෙන් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

$k = 1$ විට පථය හඳුන්වා දෙන්න.

$k \ne 1$ නම් ඉහත සමීකරණය, k හි අගය අනුව,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ හෝ } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ආකාරයට ප්‍රකාශකර මෙම කේතුකයේ විකේන්ද්‍රිකතාව k බව පෙන්වන්න; මෙහි a, b යනු තාත්වික සංඛ්‍යා වේ.